

1.3. Anstieg und Ableitung

[...] Montag, der 21.09.20;

Für allgemeine Punkte $A(x_0 | f(x_0))$ und $B_h(x_0 + h | f(x_0 + h))$ ergibt sich:

$$m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = :D(h)$$

der sogenannte **Differenzenquotient**. Dieser beschreibt die **durchschnittlichen Anstieg** einer Funktion f im Intervall $[x_0; x_0 + h]$, also den Anstieg der Sekante durch die Punkte A und B_h .

Nähern wir den Punkt B_h immer weiter an A an, so wird die Sekante s_h zur **Tangente** an den Punkt A und besitzt den gleichen Anstieg wie die Funktion f an der Stelle x_0 . Dafür benötigen wir den Grenzwert:

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

[...]

Übung. AB Aufgabe 4.

Ansatz für (a): $f(x) = -x^2 + 4; x_0 = 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} D(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2 + h)^2 + 4 - (-2^2 + 4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h + h^2}{h} = \underline{-4}$$

Definition. Sei f eine Funktion und $x_0 \in D_f$. Dann heißt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der **Differentialquotient von f an der Stelle x_0** . Existiert dieser Grenzwert, so nennt man diesen die **Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0** und schreibt kurz

$$f'(x_0) \text{ bzw. } \frac{df}{dx}(x_0) \text{ bzw. } \frac{dy}{dx}(x_0).$$

f heißt dann **differenzierbar an der Stelle x_0** .

Merke:

- Differenzenquotient: mittlerer Anstieg bzw. mittlere Änderungsrate
- Differentialquotient: Anstieg der Kurve an einer Stelle bzw. momentane Änderungsrate

Bsp.: $f(x) = 2x - 1; x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2 + h) - 1 - (2 \cdot 2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 2h - 1 - 4 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \underline{2} \end{aligned}$$

$g(x) = |x|; x_0 = 0$

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

Der Grenzwert existiert nicht, damit auch nicht die Ableitung an der Stelle $x_0 = 0$. Somit ist $g(x) = |x|$ an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

Übung. Lb S. 24 / 3 (b), (d), (e), (g), (i)

Donnerstag, der 24.09.20:

Mithilfe des Differentialquotienten kann man nun die Gleichung der Tangente an die Funktion f an der Stelle x_0 bestimmen. Beachte: Die Tangente im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ hat den gleichen wie die Funktion f an dieser Stelle.

Bsp.: $f(x) = x^2; x_0 = 1$

$$m_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 + h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \underline{2}$$

Ansatz für die Tangente t an der Stelle x_0 :

$$\begin{aligned} t: y &= m_t x + n \\ \rightarrow y &= 2x + n \end{aligned}$$

Die Tangente und die Funktion stimmen im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ überein, also können wir P in die Tangentengleichung für t einsetzen:

$$\begin{aligned} P(x_0 | f(x_0)) &\rightarrow P(1 | 1) \\ 1 &= 2 \cdot 1 + n \rightarrow n = -1 \\ t: \underline{y} &= \underline{2x - 1} \end{aligned}$$

Vorgehen für Tangenten im Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ an die Funktion f :

- Anstieg $m_t = f'(x_0)$ berechnen
- Tangentengleichung $t: y = m_t \cdot x + n$ aufstellen
- P in t einsetzen und n bestimmen

Übung. Lb S. 26 / 16

CAS-Nutzung: Lb S. 26 / 7 zur Übung mit CAS – Vorgehen im CAS auf den folgenden zwei Seiten

Tangente an einen Funktionsgraphen

Das ClassPad II verfügt über zahlreiche Werkzeuge zur Berechnung von Tangenten. Anhand eines Musterbeispiels werden einige davon vorgestellt. Als ein mögliches Werkzeug dient die erste Ableitung einer Funktion, welche erst auf Seite 18 genauer besprochen wird. Aus Gründen der Vollständigkeit soll dieses Werkzeug jedoch auch für diese Berechnung Verwendung finden können.

Ein Befehl zur Berechnung der Tangentengleichung einer Funktion an einer Stelle ist `tanLine`, welcher sich unter **Menüleiste/Aktion/Berechnungen/linie** befindet.

Befehl: `tanLine` (Term oder Funktion, Variable, Stelle)

Sollte die Syntax nicht so vertraut sein, kann die Eingabe auch unter **Menüleiste/Interaktiv/Berechnungen/linie** vorgenommen werden.


C 2.12 Ermittlung der Tangentensteigung und der Tangentengleichung

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -0,25x^3 - 0,125x^2 + 2,25x$.

Ermittle die Tangentensteigung und die Tangentengleichung im Punkt $(1,5 | f(1,5))$ rechnerisch und grafisch!

Lösung 1: Main-Anwendung – Befehl `tanLine`

Öffne die **Main**-Anwendung und folge den Anweisungen!

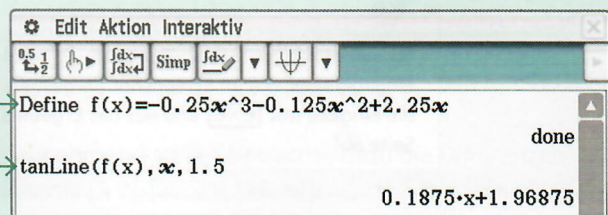
Hinweis: Der folgende Screenshot wurde durch Tippen auf  in der **Iconleiste** erstellt.

1 2

Softwaretastatur/Math3: Gib die Zeile wie im Screenshot dargestellt ein und bestätige die Eingabe mit **EXE**!


1 2

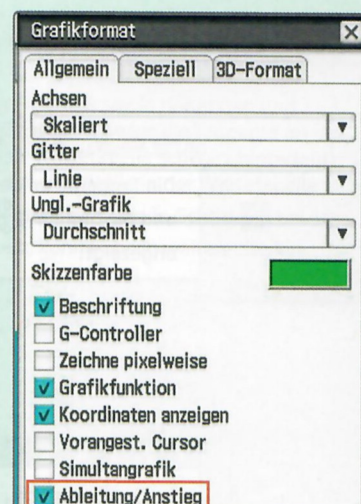
Menüleiste/Aktion/Berechnungen/linie: Wähle den Befehl `tanLine` und gib den Rest der Zeile wie im Screenshot dargestellt ein! Bestätige die Eingabe mit **EXE** und lies das Ergebnis ab!




Lösung 4: Grafik & Tabelle-Anwendung – Grafische Lösung

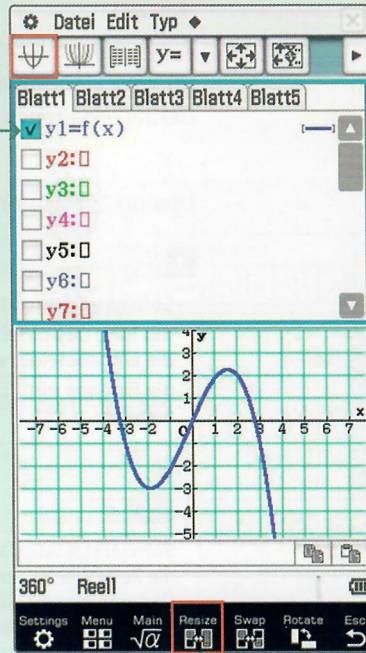
Öffne die **Grafik & Tabelle**-Anwendung und folge den Anweisungen!

Damit die Tangentengleichung angezeigt wird, muss unter **Menüleiste/****/Grafikformat** das Kästchen bei **Ableitung/Anstieg** angehakt sein.



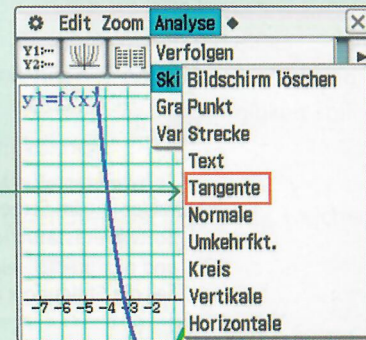
1 2 3 4 5 6

Verwende zur Eingabe die bereits definierte Funktion $f(x)$!
 Hake das Kästchen vor der ersten Eingabezeile an und tippe in der **Symbolleiste** auf , um den Funktionsgraphen zu zeichnen!



1 2 3 4 5 6

Achte darauf, dass das **Grafikfenster** markiert ist und tippe in der **Iconleiste** auf , um das **Grafikfenster** zu vergrößern!

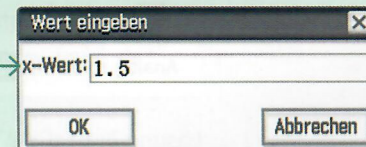


1 2 3 4 5 6

Menüleiste/Analyse/Skizze: Tippe auf den Befehl **Tangente** !
 Es wird eine Tangente an die Kurve im Punkt mit angegebener x- und y-Koordinate angezeigt.

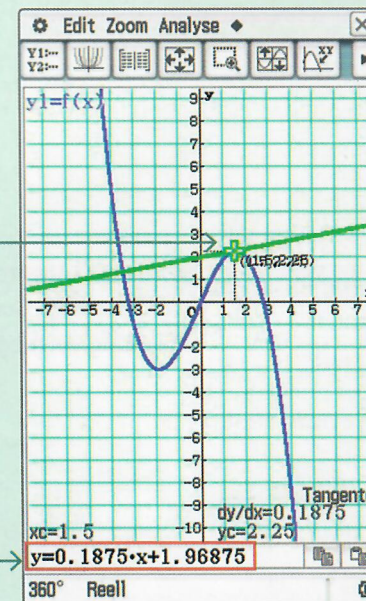
1 2 3 4 5 6

Um die Tangente an der richtigen Stelle $x=1,5$ zu erhalten, drücke **1** auf der Tastatur! Es öffnet sich ein Fenster zur Eingabe der gewünschten Stelle. Gib in die Eingabezeile **1.5** ein und bestätige die Eingabe mit **OK** !



1 2 3 4 5 6

Die Tangente an der Stelle $x_c = 1,5$, die y-Koordinate $y_c = 2,25$ und die Steigung $\frac{dy}{dx} = 0,1875$ an dieser Stelle werden angezeigt!



1 2 3 4 5 6

Drücke auf **EXE** ! Die Tangentengleichung wird in der unteren Zeile angezeigt.

